At Right Angles

A Resource for School Mathematics

बीजगणित से परिचय – भाग 4

पद्मप्रिया शिराली

Azim Premji University

A publication of Azim Premji University together with Community Mathematics Centre, Rishi Valley

घातांक और सर्वसमिकाएँ

यह *बीजगणित से परिचय* शृंखला का चौथा लेख है। पहले लेख में बीजगणित को 'पैटर्न की भाषा' के रूप में देखा गया था। यह लेख पैटर्न का अवलोकन करने और पदों व व्यंजकों का उपयोग करके पैटर्नों को व्यक्त करने पर केन्द्रित था। दूसरे लेख में बीजगणित को 'डिज़ाइन की भाषा' के रूप में देखा गया था और यह बीजगणितीय भाषा का उपयोग करके डिज़ाइनों को व्यक्त करने पर केन्द्रित था। तीसरे लेख में 'सन्तुलन पद्धति' और 'मशीन पद्धति' का उपयोग करके सरल समीकरणों को हल करने की पड़ताल की गई थी। हालाँकि, समीकरणों का विषय-क्षेत्र (topic) बहुत बड़ा है और जैसे-जैसे विद्यार्थी उच्चतर बीजगणित की ओर बढ़ते जाते हैं यह और भी अधिक जटिल होता जाता है। इसी तरह, उच्च घातों के व्यंजकों को सरल व हल करने के विषय में भी जटिलता लगातार बढ़ती जाती है।

उच्च घातों के व्यंजकों के सरलीकरण, गुणनखण्डन और प्रसारण के लिए घातांकों के नियम और मूलभूत सर्वसमिकाओं का अध्ययन प्रीकर्सर (precurser का मतलब है : पहले से ही विद्यमान चीज़ से विकसित या प्रभावित) है। घातांकों के नियम बड़ी संख्याओं (जिन्हें अक्सर वैज्ञानिक संकेतन में लिखा जाता है और इनमें घात शामिल होती है) को उपयोग करते समय भी लागू होते हैं। जब इन संख्याओं को गुणा-भाग किया जाता है या घात के रूप में व्यक्त किया जाता है, तब घातांकों के नियम लागू होते हैं।

इस लेख में हम घातांकों (केवल धनात्मक पूर्ण संख्या घातांक) और आधारभूत सर्वसमिकाओं का अध्ययन करेंगे। यह लेख वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्याओं की स्थितियों में इन अवधारणाओं के अनुप्रयोग के बारे में बात नहीं करता है।

नोट : बच्चों को अवधारणाओं को समझाने के लिए यह महत्त्वपूर्ण है कि एक समय में केवल एक ही पहलू पर ध्यान दिया जाए, उसे धीरे-धीरे विकसित किया जाए और कई अवधारणाओं या विविधताओं को एक साथ न लाया जाए।

गतिविधि 1

उद्देश्य : 10 की उच्च घातों को घातांकीय रूप में व्यक्त करना। इसका प्रयोजन बड़ी संख्याओं को संक्षिप्त रूप में लिखना है।

आवश्यक शर्तें :

• लाखों और करोड़ों तक की बड़ी संख्याओं के साथ परिचय।

• अभाज्य गुणनखण्डन।

बच्चों को समाचार पत्रों या पुस्तकों (एटलस, भूगोल पुस्तक) से कुछ ऐसे आँकड़े एकत्र करके लाने को कहें, जिनमें बड़ी संख्याएँ (10 की घात के एक उपयुक्त गुणज के रूप में सन्निकटित की गईं) इस्तेमाल की गई हों।

जाँचें कि क्या वे बड़ी संख्याओं को पढ़ने और लिखने में सहज हैं।

बोर्ड पर लिखने के लिए कुछ बड़ी संख्याएँ चुनें और ऐसी संख्याओं को लिखने और पढ़ने में आने वाली कठिनाइयों पर चर्चा करें।

उदाहरण : सूर्य पृथ्वी से **15,00,00,000** किलोमीटर की दूरी पर है।

हमारे सूर्य का सबसे नज़दीकी तारा प्रोक्सिमा सेंटौरी **4,02,08,00,00,00,000** किलोमीटर दूर है।

उन्हें बताएँ कि घातों का उपयोग करके इन संख्याओं को कैसे लिख सकते हैं।

1,00,000 को $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसे 10^5 के रूप में लिखा जा सकता है।

यह बहुत महत्त्वपूर्ण है कि इसे '10 की घात 5' के रूप में ज़ोर-से बोलकर पढ़ा जाए।

बच्चे हमेशा से दो संख्याओं के बीच एक चिह्न देखने के आदी रहे हैं। यह पहला मौक़ा होगा जब उनका सामना दो ऐसी संख्याओं से होता है जिनके बीच कोई स्पष्ट चिह्न नहीं है। बच्चों को इस निरूपण को अपने दिमाग़ में बैठाने और सही ढंग से इसकी व्याख्या करने में कुछ समय लगेगा।

20,00,00,000 को इस रूप में लिखा जा सकता है

$2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

इसे 2×108 के रूप में लिखा जा सकता है। इसे '2 गुणा 10 की घात 8' के रूप में पढ़ें। इस ओर बच्चों का ध्यान आकर्षित करें कि यह $(2 \times 10)^8$ के समान नहीं है।

इसका विस्तार क्या होगा?

$20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20$

4,00,00,00,000 को इस रूप में लिखा जा सकता है

$4 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

इसे 4×10^9 के रूप में लिखा जा सकता है। इसे '4 गुणा 10 की घात 9' के रूप में पढ़ें।

नोट : *आधार* और *घातांक* जैसे औपचारिक शब्दों से परिचय कुछ समय बाद कराया जा सकता है।

गतिविधि 2

उद्देश्य : $a \times 3$ और a^3 के बीच अन्तर को बताना।

बच्चों को निम्न पैटर्न का अध्ययन करने और पैटर्न की भाषा का उपयोग करके इसका वर्णन करने के लिए कहें।

- $5 + 5 + 5 = 15 = 3 \times 5$
- $2 + 2 + 2 = 6 = 3 \times 2$
- $7 + 7 + 7 = 21 = 3 \times 7$
- $a + a + a = 3a = 3 \times a$

अब उन्हें इस पैटर्न का अध्ययन करने के लिए कहें।

- $5 \times 5 \times 5 = 125$
- $2 \times 2 \times 2 = 8$
- $7 \times 7 \times 7 = 343$
- $a \times a \times a = ???$ (क्या बच्चे यह बताने में सक्षम हैं कि यहाँ क्या आएगा?)

बच्चों को उन अन्तरों के बारे में बताने के लिए कहें जो उन्होंने इन दोनों पैटर्नों के बीच देखे। पहले वाले पैटर्न में एक योज्य सम्बन्ध (additive relationship) है जहाँ एक राशि को बार-बार अपने आप में जोड़ा जाता है, जबकि दूसरे वाले पैटर्न में एक गुणात्मक सम्बन्ध (multiplicative relationship) है जहाँ एक राशि को बार-बार ख़ुद से गुणा किया जाता है।

इसके बाद शिक्षक इसे लिखने और पढ़ने के मानक रूप को दिखा सकते हैं।

- $5 \times 5 \times 5 = 125 = 5^3$ को '5 की घात 3' के रूप में पढ़ा जाता है।
- $2 \times 2 \times 2 = 8 = 2^3$ को '2 की घात 3' के रूप में पढ़ा जाता है।
- $7 \times 7 \times 7 = 34^3 = 7^3$ को '7 की घात 3' के रूप में पढ़ा जाता है।
- $a \times a \times a = a^3$ को 'a की घात 3' के रूप में पढ़ा जाता है।

सावधानी : 4^3 का 4×3 के रूप में मूल्यांकन करना एक बहुत ही सामान्य ग़लती है, जो प्रारम्भिक चरण में होती है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि बच्चों ने a^3 के अर्थ को पूरी तरह से समझा नहीं होता है।

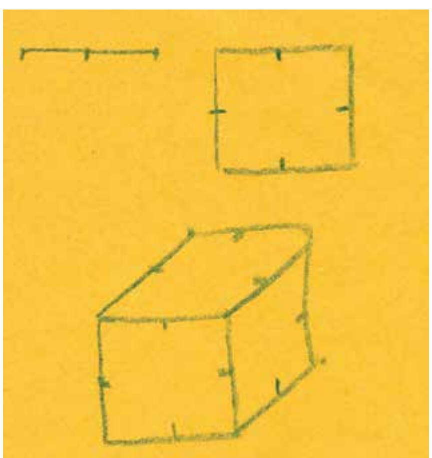
बच्चों को ऐसे बहुत सारे मौखिक अभ्यास करवाएँ जो 'घात' के अर्थ को पुख़्ता करते हों।

छोटी संख्या की घातों की गणना करने के लिए तीस सैकेंड वाले ऐसे अभ्यासों का प्रयोग किया जा सकता है, जिनके लिए मानसिक गणना की ज़रूरत हो।

शिक्षक कहेंगे '4 की घात 3' और बच्चों को तीस सैकेंड के भीतर इसका जवाब देना होगा।

शिक्षक कहेंगे '64' और बच्चों को इसे घातांकीय रूप '2 की घात 6' या '4 की घात 3' या '8 की घात 2' के रूप में बताना होगा।

घातांकों का चित्र निरूपण



चित्र-1

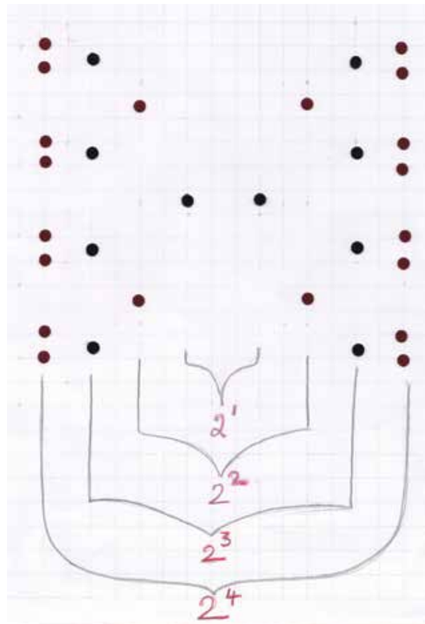
2^1 को एक ऐसी रेखा के रूप में माना जा सकता है जो 2 इकाई लम्बी हो।

2^2 को एक ऐसे वर्ग के रूप में माना जा सकता है जिसकी भुजा की लम्बाई 2 इकाई हो।

2^3 को एक ऐसे घन के रूप में माना जा सकता है जिसके किनारों की लम्बाई 2 इकाई हो।

2^4 को आप कैसे दर्शाएँगे?

इसका एक तरीक़ा यहाँ दिया गया है।



चित्र-2

गतिविधि 3

उद्देश्य : घातांकों का उपयोग करके संख्याओं की पड़ताल करना।
पूर्व ज्ञान : अभाज्य गुणनखण्डन।

बच्चों को एक ऐसी संख्या खोजने के लिए कहें, जिसे दो तरीक़ों से घातांकों का उपयोग करके व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण : $16 = 2^4 = 4^2$

1 और 100 के बीच ऐसी कितनी संख्याएँ खोजी जा सकती हैं?

बच्चों को एक ऐसी संख्या खोजने के लिए कहें, जिसे तीन तरीक़ों से घातांकों का उपयोग करके व्यक्त किया जा सकता है।

1 और 100 के बीच ऐसी कितनी संख्याएँ खोजी जा सकती हैं?

1 और 200 के बीच ऐसी कौन-सी संख्या है, जिसे सबसे ज़्यादा तरीक़ों से व्यक्त किया जा सकता है?

क्या बच्चे अपने लिए इस तरह के और सवाल तैयार कर सकते हैं?

क्या इस तरह की पड़ताल में कोई पैटर्न खोजा जा सकता है?

खेल 1

उद्देश्य : घातांक संकेतनों का अभ्यास करना।

सामग्री : 16 कार्डों का सेट।

16 कार्डों (8 मिलान जोड़ियों) का एक सेट तैयार करें, जहाँ प्रत्येक जोड़ी में एक कार्ड पर संख्या का घातांकीय रूप और दूसरे कार्ड पर उसका मान होता है।

(**उदाहरण :** 2^4, 16, $4 \times 4 \times 4$, 2^6, $3 + 3 + 3$, 3^2, 4^2)

अब कार्डों को उल्टा करके ज़मीन पर रखा जा सकता है और इसे याददाश्त के खेल के रूप में खेला जा सकता है।

नोट : ध्यान रखें कि घात 0 का उपयोग तब तक न करें जब तक कि बच्चों को इससे ठीक से अवगत नहीं कराया गया हो।

गतिविधि 4

उद्देश्य : आधार के समान होने पर घातांक नियमों का अध्ययन करना, $am \times an = a(m+n)$

बच्चों को निम्नलिखित उदाहरणों में से प्रत्येक का अध्ययन करने और नियम की खोज करने के लिए कहें।

उदाहरण 1: $5^3 \times 5^2$ को सरल करने पर क्या आएगा?

एक गुणनखण्ड के रूप में 5 को 3 बार दोहराना × एक गुणनखण्ड के रूप में 5 को 2 बार दोहराना = एक गुणनखण्ड के रूप में 5 को (3 +2) बार दोहराना।

$(5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5) = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$5^3 \times 5^2 = 5^{(3+2)} = 5^5$

उदाहरण 2: $2^4 \times 2^5$ को सरल करने पर क्या आएगा?

उदाहरण 3: $3^4 \times 3^3$ को सरल करने पर क्या आएगा?

बच्चों को नीचे दिए गए परिणामों को नोट करने, पैटर्न को ध्यान-से देखने व उसे सामान्यीकृत तरीक़े से व्यक्त करने के लिए कहें।

- $5^3 \times 5^2 = 5^{(3+2)}$
- $2^4 \times 2^5 = 2^{(4+5)}$
- $3^4 \times 3^3 = 3^{(4+3)}$
- $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$

सावधानी : बच्चे अक्सर इस नियम को लागू करने में ग़लती करते हैं।

उन्हें यह पूर्णत: स्पष्ट होना चाहिए कि $a^m \times a^n$ और $a^m + a^n$ बराबर **नहीं** हैं।

यह बताना महत्त्वपूर्ण है कि $5^3 \times 5^2$ क्या दर्शाता है, जैसा कि पहले बताया जा चुका है (एक गुणनखण्ड के रूप में 5 को 3 बार दोहराना × एक गुणनखण्ड के रूप में 5 को 2 बार दोहराना = एक गुणनखण्ड के रूप में 5 को (3 + 2) बार दोहराना)।

उपरोक्त प्रकार की ग़लती से बचने के लिए इसे कई उदाहरणों के सन्दर्भ में किया जा सकता है।

शिक्षकों को चाहिए कि वे दोहराए जाने वाले गुणनखण्ड और दोहरावों की संख्या पर ध्यान केन्द्रित करने में बच्चों की मदद करें।

एक और बात जिसे स्पष्ट किया जाना चाहिए, वह यह है कि $a^m + a^n$ और $a^{(m+n)}$ बराबर नहीं होते हैं।

- कौन-से तरीक़े इन ग़लतियों को कम करने में मदद कर सकते हैं?

- क्या दृश्य (visuals) इसमें मदद करेंगे? क्या बारम्बार अभ्यास से मदद मिलेगी? क्या सही या ग़लत वाले सवालों से मदद मिलेगी?

मैंने पाया है कि ऐसी सामान्य ग़लतियों का एक संग्रह बनाना और बच्चों के समूहों को आपस में इन ग़लतियों पर चर्चा करने के लिए कहना उपयोगी होता है। हर समूह में एक प्रकार की ग़लती पर चर्चा करने और फिर चर्चा के बिन्दुओं को शेष कक्षा के साथ साझा करने और ग़लतियाँ होने के कारणों पर बात करने से मदद मिलती है।

बच्चे छोटे मानों के साथ गणना करके ऐसे परिणामों की जाँच कर सकते हैं।

नोट : बच्चों को अब *आधार* और *घातांक* शब्दों से परिचित कराया जा सकता है।

आधार वह राशि है जिसे दोहराया जाता है।

घातांक या **घात** यह बताती है कि राशि को कितनी बार ख़ुद से गुणा किया गया है। यदि किसी बच्चे के लिए एक ही चीज़ के लिए दो अलग-अलग शब्दों का उपयोग करना कठिन होता है, तो शिक्षक इनमें से किसी एक शब्द का उपयोग कर सकते हैं।

जब कभी भी आप *गुणांक* (coefficient) से परिचय कराएँ तो इस बात का ध्यान रखें कि बच्चे *घातांक* और *गुणांक* में भ्रमित न हों।

गतिविधि 5

उद्देश्य : आधार के समान होने पर घातांक नियमों का अध्ययन करना, $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

बच्चों को निम्नलिखित उदाहरणों में से प्रत्येक का अध्ययन करने और नियम की खोज करने के लिए कहें।

उदाहरण 1: $4^5 \div 4^2$ को सरल करने पर क्या होगा?

4 को एक गुणनखण्ड के रूप में 5 बार दोहराना÷ 4 को एक गुणनखण्ड के रूप में 2 बार दोहराना 4 को एक गुणनखण्ड के रूप में (5 - 2) = 3 बार दोहराए जाने के समान है।

$$\frac{(4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4)}{(4 \times 4)} = 4 \times 4 \times 4$$

$4^5 \div 4^2 = 4^{(5-2)} = 4^3$

उदाहरण 2: $7^8 \div 7^3$ को सरल करने पर क्या होगा?

उदाहरण 3: $3^4 \div 3^3$ को सरल करने पर क्या होगा?

बच्चों को नीचे दिए गए परिणामों को नोट करने, पैटर्न को ध्यान-से देखने और उसे सामान्यीकृत तरीक़े से व्यक्त करने के लिए कहें।

- $4^5 \div 4^2 = 4^{(5-2)}) = 4^3$
- $7^8 \div 7^3 = 7^{(8-3)} = 7^5$
- $3^4 \div 3^3 = {}^{3(4-3)} = 3^1$
- $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

कुछ बच्चे पूछ सकते हैं कि यदि हर की संख्या में बड़ी या समान घात हो तो क्या होगा। शिक्षक उन्हें बता सकते हैं कि इस बारे में जल्दी ही बात की जाएगी।

सावधानी : एक बार फिर आमतौर पर होने वाली ग़लतियों पर ध्यान दें और सुनिश्चित करें कि बच्चे यह समझ गए हैं कि

$a^m \div a^n$ और $a^m - a^n$ बराबर **नहीं** हैं और इसी प्रकार $a^m - a^n$ और $a^{(m-n)}$ बराबर **नहीं** हैं।

कभी-कभी बच्चे $3^4 \times 2^3 = 6^7$ जैसी ग़लतियाँ करते हैं। ऐसी स्थितियों में बुनियादी बातों पर वापस जाना और ग़लत धारणा को स्पष्ट करना महत्त्वपूर्ण है।

घातांकों के नियमों को समझाने के लिए उदाहरणों के साथ-साथ ग़ैर-उदाहरण भी दें।

मसलन, घातांकों के नियमों को $3^4 \times 2^3$ पर लागू करना सम्भव नहीं है।

गतिविधि 6

उद्देश्य : घातांक के समान होने पर घातांक नियमों का अध्ययन करना, $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

बच्चों को निम्नलिखित उदाहरणों में से प्रत्येक का अध्ययन करने और ख़ुद से नियम खोजने के लिए कहें।

उदाहरण 1: $3^3 \times 5^3$ का मान क्या होगा?

- $2^4 \times 3^4$ का मान क्या होगा?
- $6^2 \times 4^2$ का मान क्या होगा?

बच्चों को इन्हें विस्तृत रूप में लिखने के लिए कहें ।

- $3^3 \times 5^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$
- $2^4 \times 3^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
- $6^2 \times 4^2 = 6 \times 6 \times 4 \times 4$

साहचर्य और क्रमविनिमेय नियमों का उपयोग करते हुए पहले वाले उदाहरण को $3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$ के रूप में पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है।

इसे अब $15 \times 15 \times 15$ के रूप में लिखा जा सकता है जो कि 15^3 है।

बच्चों को अन्य दो उदाहरणों पर भी इसी तरीक़े से काम करने के लिए कहें।

- $3^3 \times 5^3 = 15^3$
- $2^4 \times 3^4 = 6^4$
- $6^2 \times 4^2 = 24^2$

क्या बच्चे पैटर्न देख पाए?

$a^m \times b^m = (ab)^m$

गतिविधि 7

उद्देश्य : यह दर्शाना कि $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

बच्चों को निम्नलिखित उदाहरणों में से प्रत्येक का अध्ययन करने और नियम की खोज करने के लिए कहें।

उदाहरण 1: $5^8 \div 2^8$ का मान क्या होगा?

- $3^7 \div 5^7$ का मान क्या होगा?
- $6^9 \div 2^9$ का मान क्या होगा?

बच्चों को इन व्यंजकों को विस्तृत रूप में लिखने के लिए कहें।

$$\frac{5^8}{2^8} = \frac{(5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)}{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)}$$

इसे इस तरह से भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^8.$$

इसी तरह $\frac{3^7}{5^7}$ को $\left(\frac{3}{5}\right)^7$ की तरह और $\frac{6^9}{2^9}$ को $\left(\frac{6}{2}\right)^9$ लिखा जा सकता है।

हम देखते हैं कि $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

गतिविधि 8

उद्देश्य : यह दर्शाना कि $a^0 = 1$

स्पष्टीकरण 1

इसमें बच्चों के भिन्नों के ज्ञान और नियम $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$ का उपयोग होता है।

बच्चों को भिन्नों का उपयोग करके इन सवालों पर काम करने को कहें।

- $\frac{3^4}{3^4}$ का क्या मान है?
- $\frac{(3 \times 3 \times 3 \times 3)}{(3 \times 3 \times 3 \times 3)}$
- $\frac{2^5}{2^5}$ का क्या मान है?
- $\frac{7^2}{7^2}$ का क्या मान है?

बच्चे इस बात पर ध्यान देंगे कि हर स्थिति में जवाब 1 है।

अब उन्हें नियम $\frac{a^m}{a^n} = a(m\text{-}n)$ का उपयोग करने के लिए कहें।

इस नियम का उपयोग करने से ऊपर के प्रत्येक उदाहरण का परिणाम निम्नानुसार होगा,

- $\frac{3^4}{3^4} = 3^{(4\text{-}4)} = 3^0$
- $\frac{2^5}{2^5} = 2^{(5\text{-}5)} = 2^0$
- $\frac{7^2}{7^2} = 7^{(2\text{-}2)} = 7^0$

भिन्नों के उपयोग से यह पहले ही स्थापित किया जा चुका है कि ये 1 के बराबर हैं।

इसलिए $3^0 = 1$

$2^0 = 1$

$7^0 = 1$

इनका सामान्यीकरण करने से हमें मिलता है कि $a^0 = 1$

स्पष्टीकरण 2

बच्चों को इनमें से प्रत्येक का मान लिखने और पैटर्न को देखने के लिए कहें।

- $2^5 = 32$
- $2^4 = 16$
- $2^3 = 8$
- $2^2 = 4$
- $2^1 = 2$
- $2^0 = ?$

आने वाला प्रत्येक उत्तर अपने से पहले वाले उत्तर का 1/2 है।

- 32 का ½, 16 है।
- 16 का ½, 8 है।
- 8 का ½, 4 है।
- 4 का ½, 2 है।

इस पैटर्न का अनुसरण करते हुए अगली संख्या 2 की ½ होनी चाहिए, जो कि 1 है।

इसलिए $2^0 = 1$

बाद में इसी तरीक़े का उपयोग ऋणात्मक घातांकों, उदाहरण के लिए $2^{(-1)}$ अथवा $^{3(-2)}$, के साथ काम करने के लिए भी किया जा सकता है।

गतिविधि 9

उद्देश्य : विविध समस्याओं के लिए घातांक नियमों का विस्तार करना।

सरलीकरण की निम्न प्रकार की समस्याएँ देकर बच्चों की समझ व अभ्यास को बढ़ाया जा सकता है।

- $a^l \times a^m \times a^n$
- $\frac{(a^c \times a^d)}{a^e}$
- $\frac{a^x}{(a^y \times a^z)}$

तुलना, अनुक्रमण (sequencing) और सरलीकरण से जुड़ी विभिन्न समस्याएँ भी दी जा सकती हैं।

गतिविधि 10

उद्देश्य : गुणांक वाले गुणनखण्डों के लिए घातांक नियमों का विस्तार करना।

बच्चों को इस तरह के उदाहरणों में गुणांकों के बीच अन्तर दिखाया जाना चाहिए।

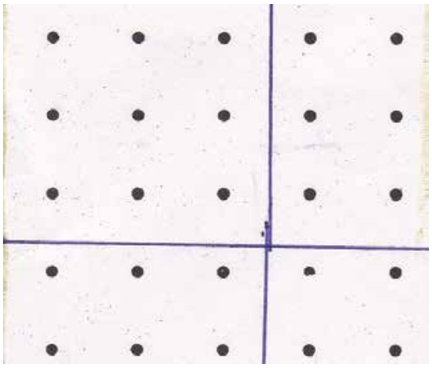
क्या $4x^2$ और $(4x)^2$ एक समान हैं?

क्या $-16x^2$ और $(-4x)^2$ एक समान हैं?

इस तरह की स्थिति में कोष्ठकों के उचित उपयोग और वर्ग की जा रही राशि की सही व्याख्या पर ध्यान देना चाहिए।

गतिविधि 11

उद्देश्य : सर्वसमिका $(a + b)^2$ को दर्शाना।



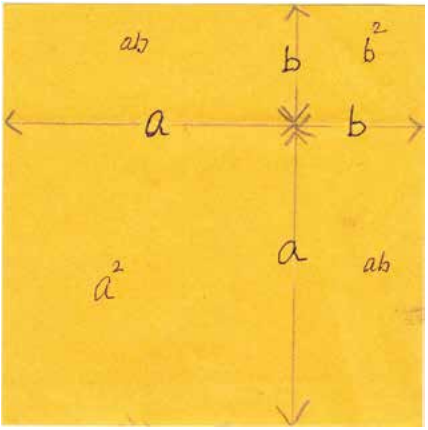
चित्र-3

बच्चों को एक वर्गाकार काग़ज़ लेकर उसे चित्र में दिखाई गई रेखाओं के अनुसार मोड़ने के लिए कहें।

दो अलग-अलग लम्बाइयों को a और b के रूप में अंकित किया जा सकता है, जैसा कि चित्र 3 में दिखाया गया है।

- मूल वर्ग की भुजा क्या है? $a + b$
- मूल वर्ग का क्षेत्रफल कितना है? $(a + b)^2$
- बड़े वर्ग का क्षेत्रफल कितना है? a^2
- छोटे वर्ग का क्षेत्रफल कितना है? b^2
- प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल क्या है? ab, ab
- इन सभी का योग क्या है? $a^2 + 2ab + b^2$

इसलिए $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



चित्र-4

शिक्षक $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ को वर्गाकार बिन्दुकित काग़ज़ पर भी दिखा सकते हैं, जैसे कि चित्र 4 में दिखाया गया है।

$(3 + 2)\ (3 + 2) = 3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 2$

जो कि $(3 + 2)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2$ है

यदि $a = 3$ और $b = 2$ हो तो $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

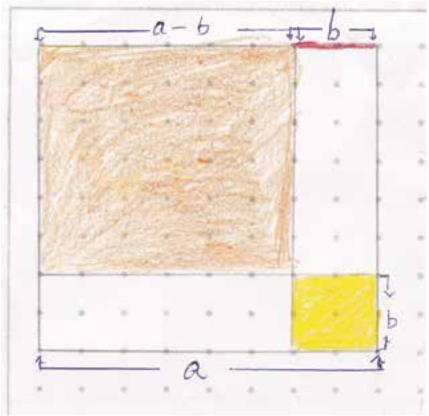
गतिविधि 12

उद्देश्य : सर्वसमिका $(a - b)^2$ को दर्शाना।

यह विधि धनात्मक संख्याओं a और b, जहाँ पर $b < a$ हो, के लिए काम करती है।

बच्चों को एक वर्गाकार काग़ज़ लेकर उसे चित्र में दिखाई गई रेखाओं के अनुसार मोड़ने के लिए कहें।

दो अलग-अलग लम्बाइयों को a और b के रूप में अंकित किया जा सकता है, जैसा कि **चित्र- 5** में दिखाया गया है।



चित्र-5

- मूल वर्ग की भुजा क्या है? a
- मूल वर्ग का क्षेत्रफल कितना है? a^2
- जिस हिस्से को काटा जा रहा है उसकी लम्बाई क्या है? b
- रेखा के शेष भाग की लम्बाई क्या है? $a - b$
- भूरे रंग से दर्शाए गए वर्ग का क्षेत्रफल क्या है?

इसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई $a - b$ है। भूरे वर्ग का क्षेत्रफल $(a - b)^2$ है।

- छोटे पीले वर्ग का क्षेत्रफल कितना है? b^2
- प्रत्येक रेखांकित आयत का क्षेत्रफल क्या है? ab
- क्या इन दोनों आयतों (ab आकार के) को हटाना सम्भव है?

ऐसे दो आयतों को हटाने का मतलब होगा कि b^2 को दो बार हटाया जाएगा।

इसकी भरपाई के लिए हमें एक b^2 को पुन: लाने की ज़रूरत है।

इसलिए $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

इसे ऐसे भी देखा जा सकता है

×	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
$-b$	$-ab$	b^2

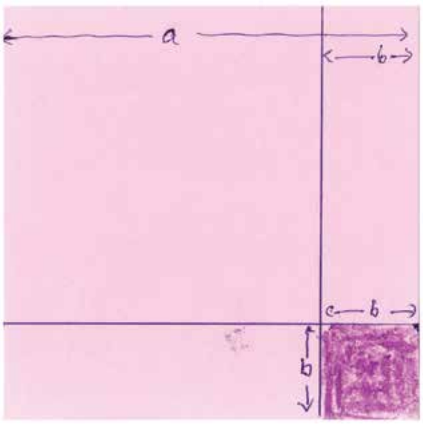
गतिविधि 13

उद्देश्य : सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ को दर्शाना।

यह विधि धनात्मक संख्याओं a और b, जहाँ पर $b < a$ हो, के लिए काम करती है।

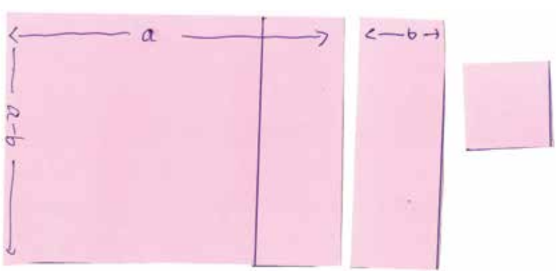
बच्चों को एक वर्गाकार काग़ज़ लेकर उसे चित्र में दिखाई गई रेखाओं के अनुसार मोड़ने के लिए कहें।

दो अलग-अलग लम्बाई को a और b के रूप में अंकित किया जा सकता है, जैसा कि चित्र-6 में दिखाया गया है।



चित्र-6

- मूल वर्ग की भुजा क्या है? a
- मूल वर्ग का क्षेत्रफल कितना है? a^2
- जिस हिस्से को काटा जा रहा है उसकी लम्बाई क्या है? b
- बैंगनी रंग से दर्शाए गए वर्ग का क्षेत्रफल कितना है? b^2



चित्र-7

शेष भागों को चित्र-7 में दिखाए अनुसार पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है।

- पुनर्व्यवस्थित आयत की लम्बाई कितनी है? $a + b$
- पुनर्व्यवस्थित आयत की चौड़ाई क्या है? $a - b$
- इस पुनर्व्यवस्थित आयत का क्षेत्रफल कितना है? $(a + b)(a - b)$

इसलिए $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

अधिक जानकारी के लिए आप नीचे दी गई लिंक का उपयोग कर सकते हैं :

घातांक :

- https://www.youtube.com/watch?v=0fKBhvDjuy0



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर में 1983 से काम कर रही हैं। यहाँ वह गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू भाषा पढ़ाती हैं। पिछले कुछ वर्षों से वह शिक्षक आउटरीच कार्य में संलग्न हैं। वर्तमान में वह पाठ्यचर्या सुधार और प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों पर एससीईआरटी (आन्ध्र प्रदेश) के साथ काम कर रही हैं। 1990 के दशक में, उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया है। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को बनाया था। इस प्रोग्राम को 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से भी जाना जाता है। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University's At Right Angles (a resource for school mathematics) मार्च 2018 में प्रकाशित Entroduction To Algebra_iv का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी **पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग :** कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही